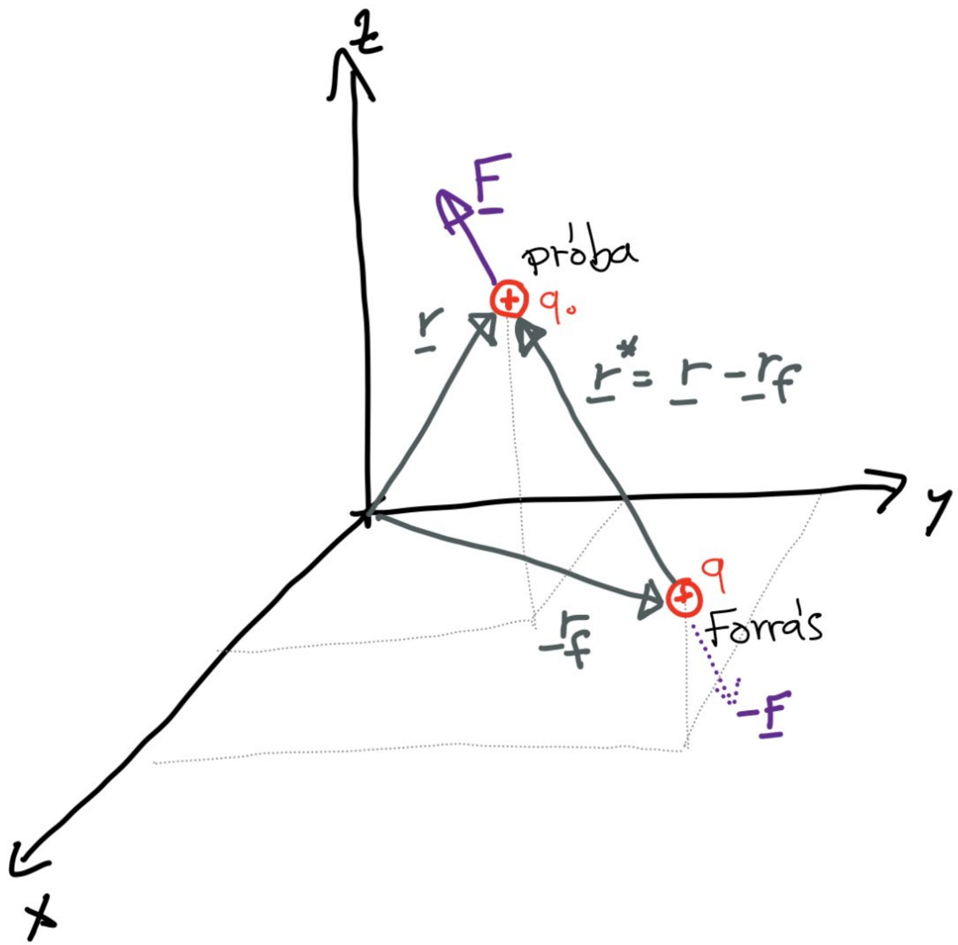
Elektrosztatika 2

Elektromos fluxus, Gauss-tétel, Maxwell I. egyenlete

Ismétlés: Nyugvó pontforrás elektrosztatikus mezője

Elektrosztatika: időben állandó elektromos terek

Erőtér: $\text{forrás} \longrightarrow \text{mező} \longrightarrow \text{erőhatás}$



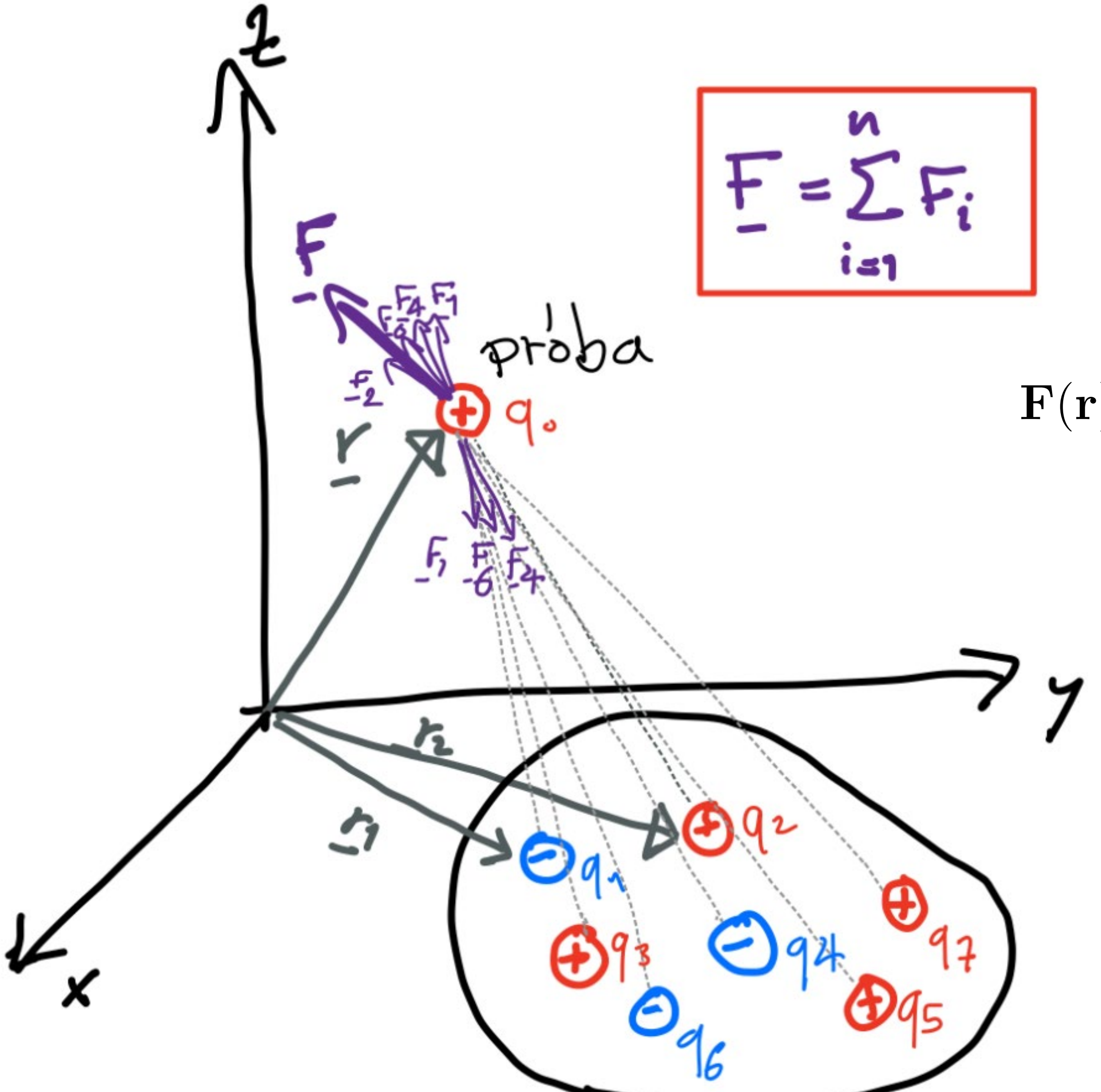
r(x,y,z) pontba helyezett pontforrásra (q_0) ható Coulomb erő:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 \cdot q}{|\mathbf{r}^*|^2}\hat{\mathbf{r}}^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 \cdot q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|}$$

A próbatöltésre ható erőt elosztva a próbatöltés nagyságával megkapjuk a minden **r**(x,y,z) pontban érvényes elektromos erőteret (vektortér!):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|}$$

Ismétlés: Nyugvó töltések elektrosztatikus mezője



$$\boxed{\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0 \cdot q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \sum_i \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

➡ Az egyes ponttöltések által létrehozott elektromos terek összeadódnak vektoriálisan:

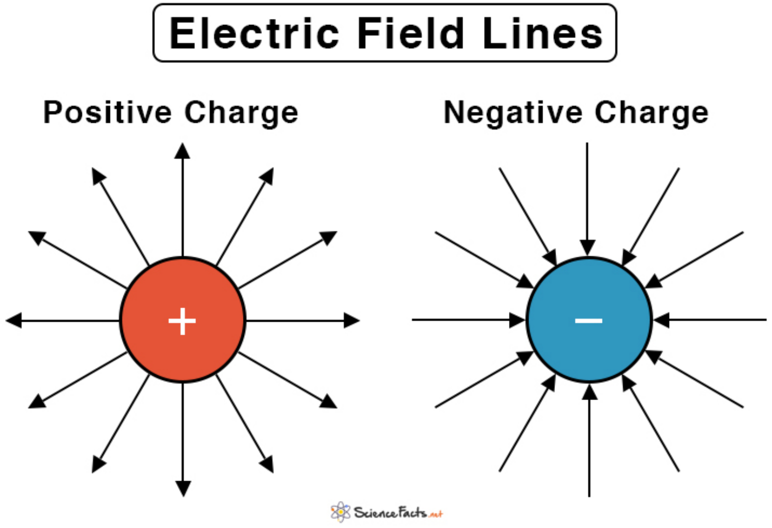
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

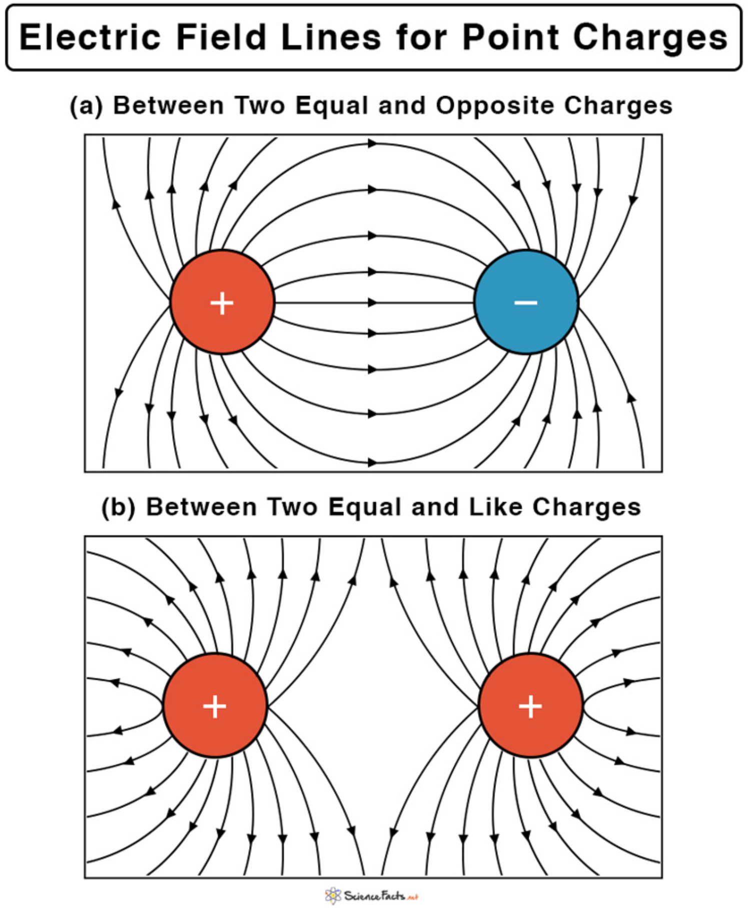
Ismétlés: Erővonalak

Irány: A próbatöltésre ható erő iránya

Sűrűség: Arányos az elektromos tér nagyságával

- A (+) töltésnél kezdődnek és a (-) töltésnél érnek véget, vagy végtelennél is kezdődhetnek vagy végződhetnek.
- Nem keresztezik egymást és nem válnak szét
- A vezető anyagokba nem hatolnak be (vezető belsejében **E**=0)



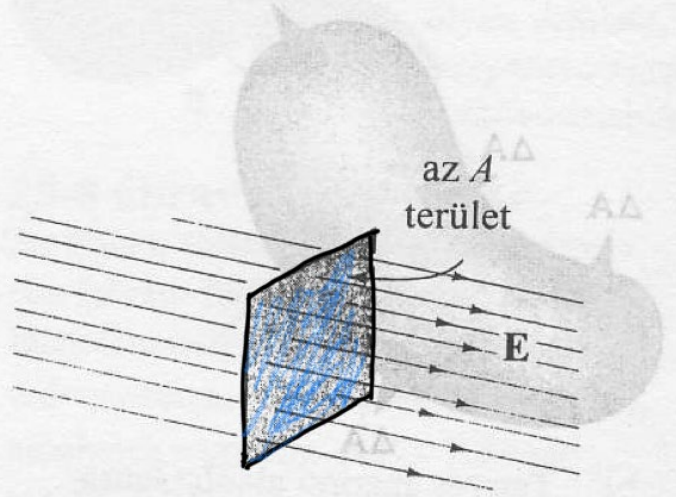


Elektromos fluxus

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

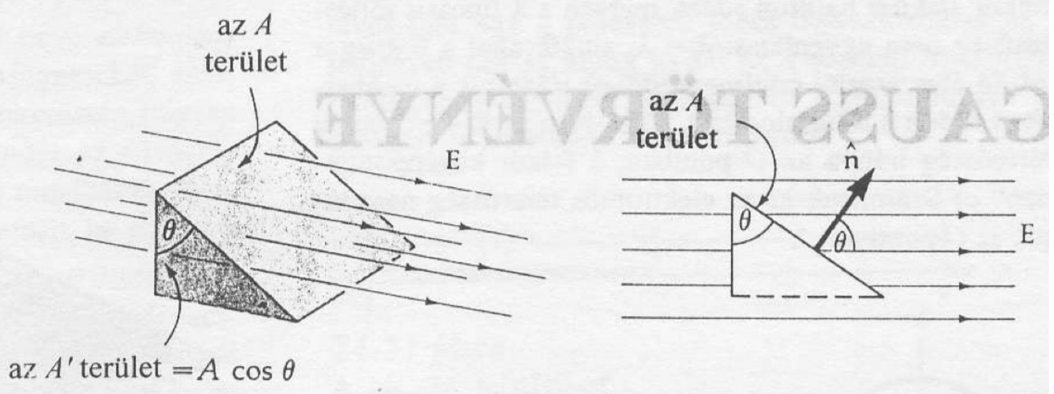
= Adott felületet metsző erővonalak száma

1. A felület merőleges az erővonalakra



25-1 ábra
Az A területű síklap merőleges az **E** térerősségű homogén elektromos erőtérre. Ezen a felületen az elektromos fluxus $\Phi_E = EA$.

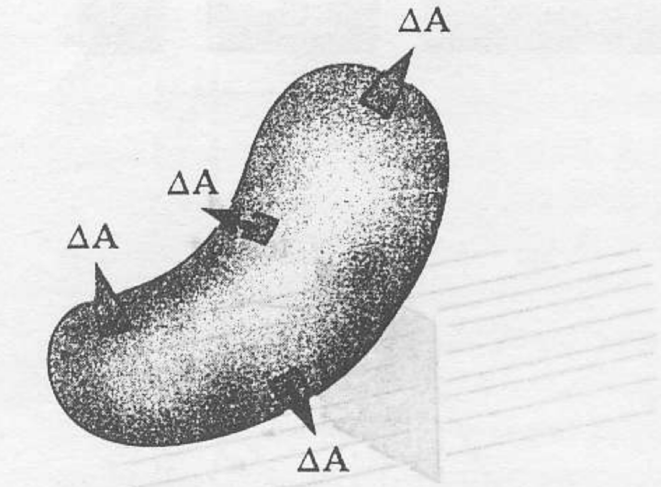
2. A felület nem merőleges az erővonalakra



a) Ha az A felületű síklap nem merőleges az **E** erővonalakra, akkor a vetülete $A' = A\cos\theta$.

b) Vegyük észre, hogy az A és A' közötti szög éppen egyenlő a felület $\hat{\mathbf{n}}$ normálvektora és a térerősség **E** vektora által bezárt szöggel.

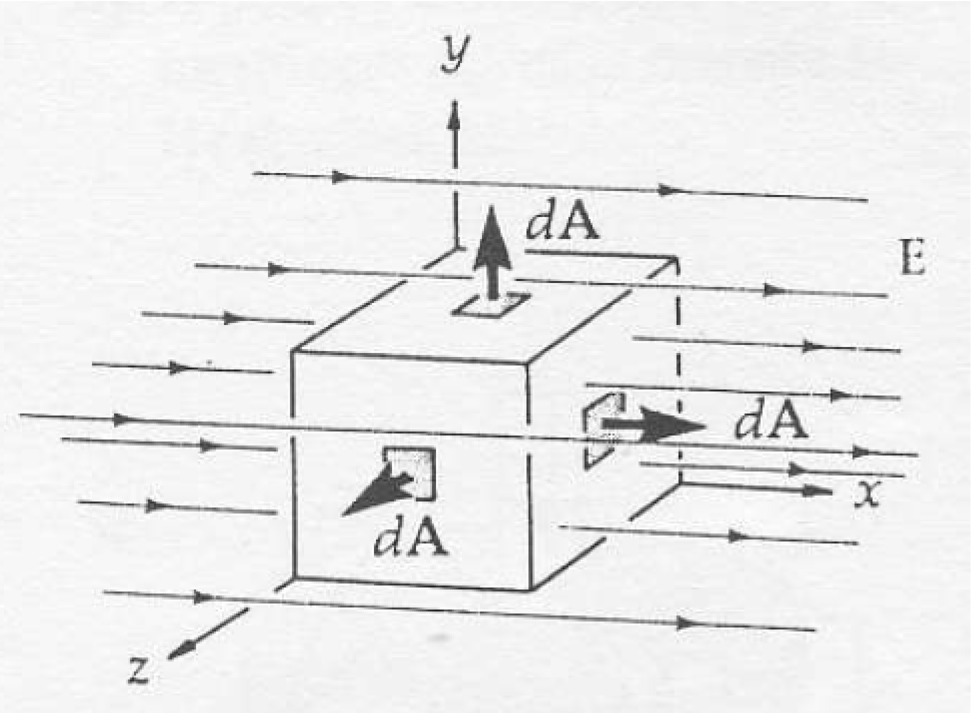
3. A felület görbült



25-3 ábra
Zárt felület, néhány **ΔA** felületvektorral, melyek merőlegesek a felszínre és kifelé mutatnak.

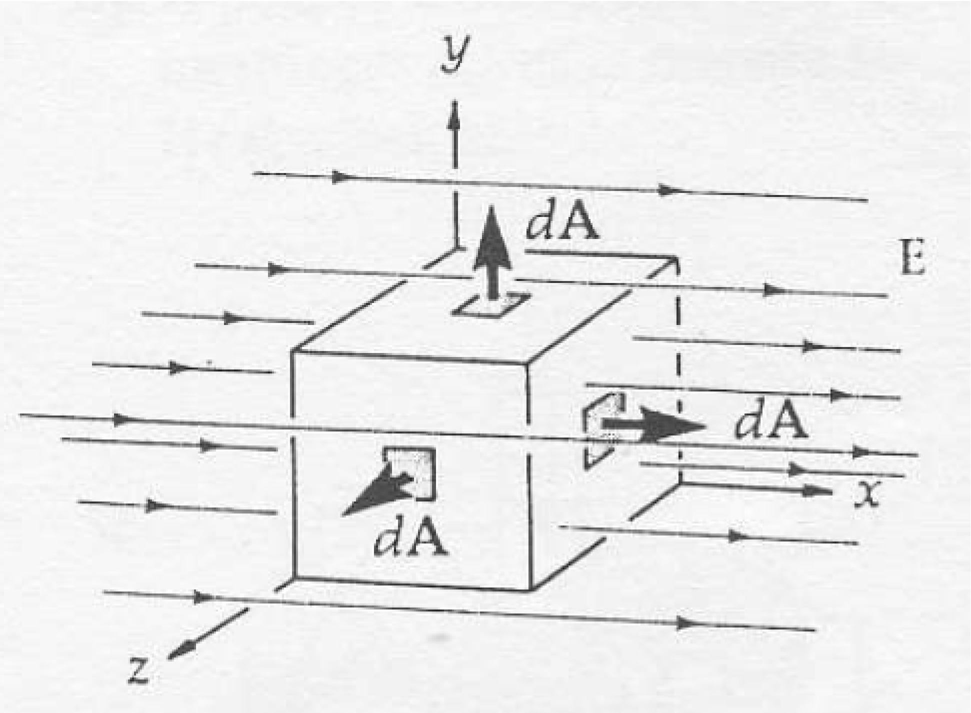
Fluxus zárt felületen, homogén **E** térben

Adott **E** térerősségű, *x* irányú, homogén elektromos tér. Mekkora fluxus az ábrán látható kocka teljes felületére?



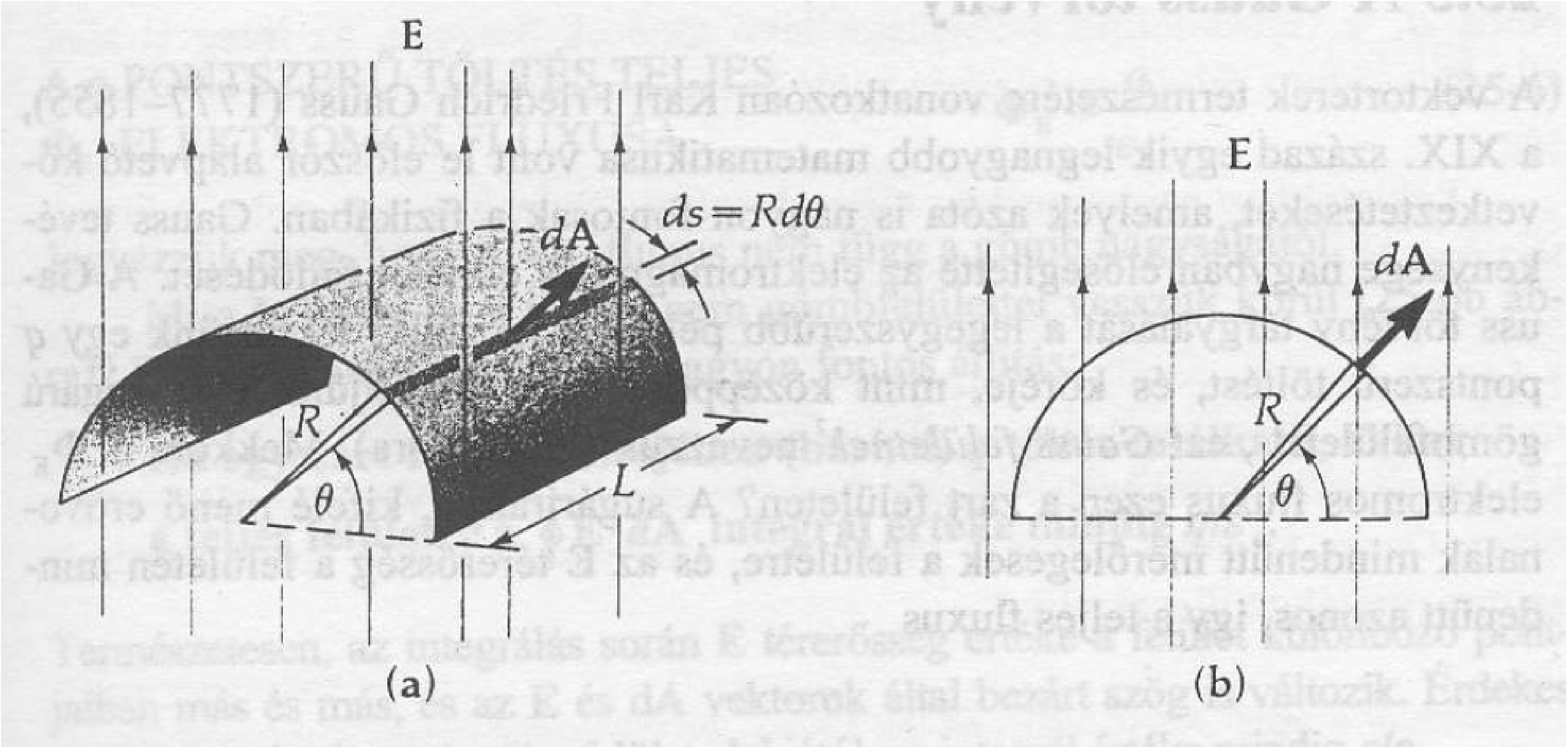
Fluxus zárt felületen, homogén **E** térben

Adott **E** térerősségű, *x* irányú, homogén elektromos tér. Mekkora fluxus az ábrán látható kocka teljes felületére?



$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Fluxus zárt felületen, homogén **E** térben

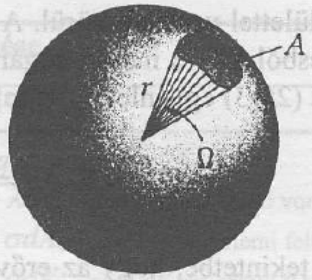


$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Gauss törvény

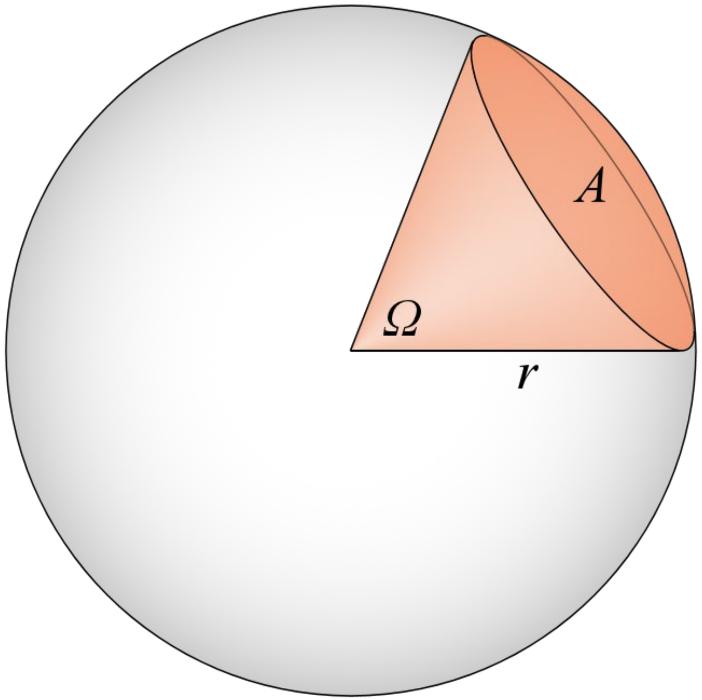
= Töltések számlálása helyett elég ismerni az elektromos teret.

Szükséges fogalom:
Térszög (szteradián)



b) A térszög definíciója:
$\Omega \equiv A/r^2$ (szteradián egységekben), ahol A annak a felületnek a nagysága, amelyet az r sugarú gömb középpontjából Ω térszög alatt látunk. Egy térszögelemre:
$\Delta\Omega \equiv \Delta A/r^2$ (szteradián egységekben). Az A felület bármilyen alakú lehet, de minden pontban merőleges kell hogy legyen a sugárra. Minthogy a gömb felülete $4r^2\pi$, a teljes gömbfelület $\Omega = 4r^2\pi / r^2 = 4\pi$ szteradián térszögnek felel meg. Az Ω térszög a középpontból kiinduló és a ΔA felülettel meghatározott kúp alakú tartománnyal szemléltethető.

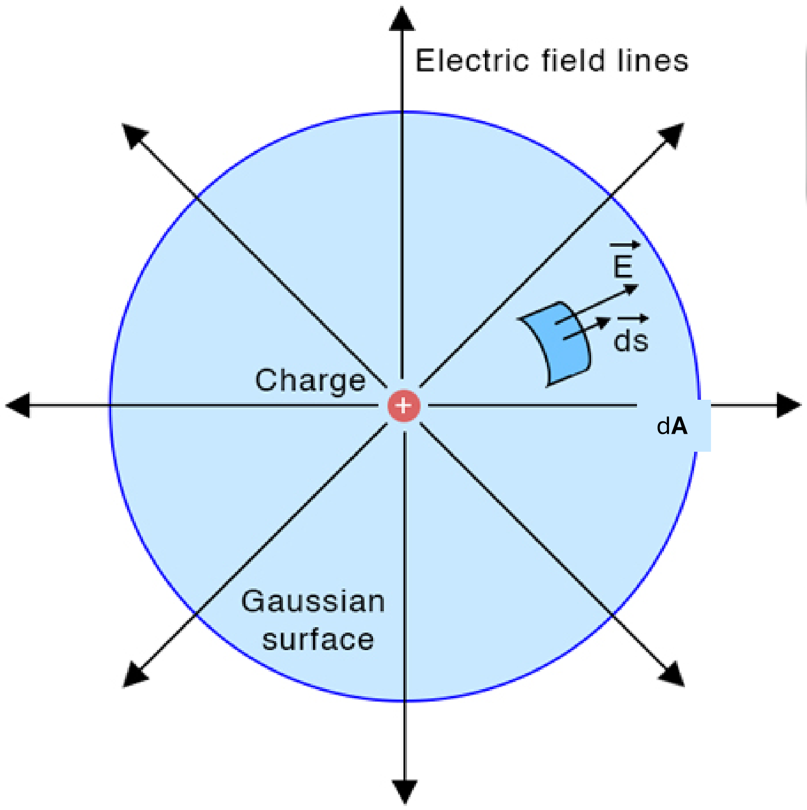
$$\Omega = 1sr \rightarrow A = r^2$$



Teljes gömbfelület: $\Omega = 4\pi$

Gauss törvény

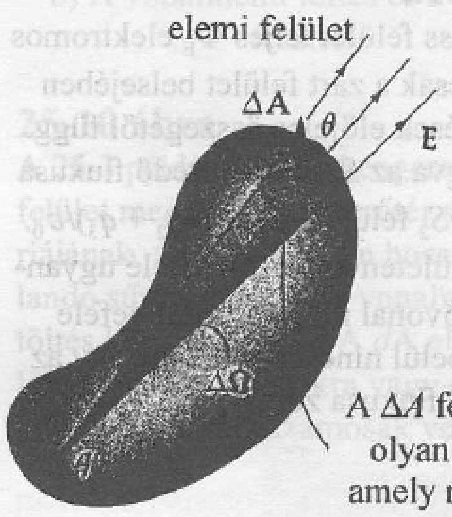
= Töltések számlálása helyett elég ismerni az elektromos teret.



A q PONTSZERŰ TÖLTÉS TELJES Φ_E ELEKTROMOS FLUXUSA $\quad \Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

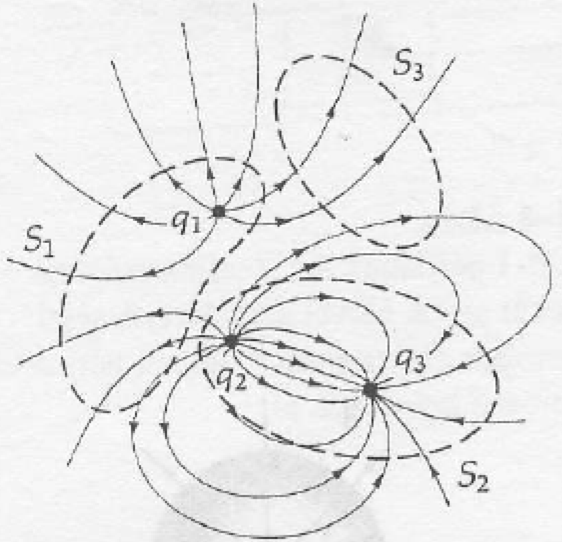
Ha egy zárt felület belsejében (bárhol) q töltés található, akkor a teljes felületre a $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ integrál értéke mindig q/ε_0.



25-8 ábra
Az ábra q töltést körülvevő önkényesen felvett felületet mutat. A ΔA felületelem nem merőleges a q-ból induló erővonalakra. A $\Delta A'$ -vel jelölt vetület, amelynek nagysága $\Delta A' = \Delta A \cos\theta$, merőleges az erővonalakra, és így meghatározza a $\Delta\Omega = (\Delta A \cos\theta)/r^2$ térszögelemet. A ΔA elemi felület a q töltés helyéről $\Delta\Omega$ térszög alatt látszik.

Gauss törvény

= Töltések számlálása helyett elég ismerni az elektromos teret.

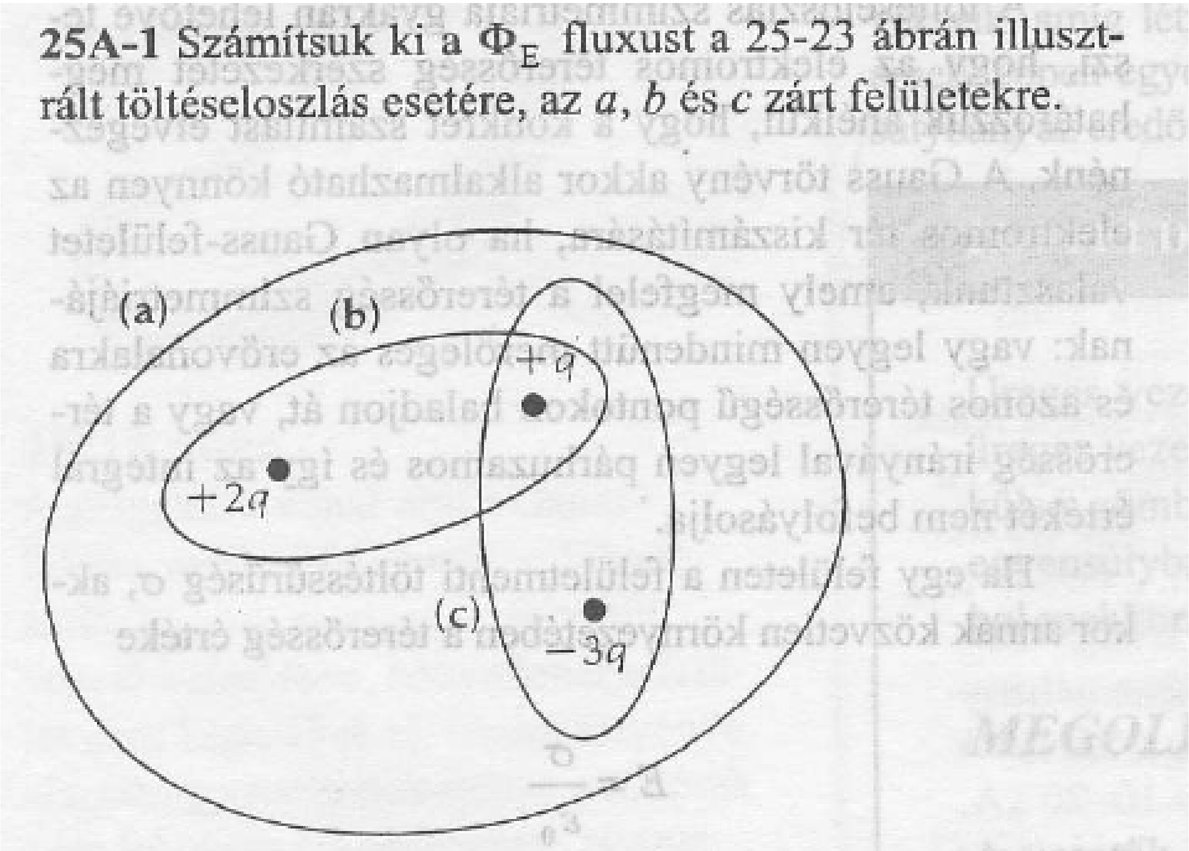


25-9 ábra

Egy Gauss felület teljes Φ_E elektromos fluxusa csak a zárt felület belsejében lévő töltések előjeles összegétől függ. Ennélfogva az S_1 felület eredő fluxusa q_1/ε_0, az S_2 felületé pedig $(q_2+q_3)/\varepsilon_0$. Az S_3 felületen keresztül kifelé ugyanannyi erővonal megy át mint befelé (hiszen belül nincsen töltés) és így az S_3 felület fluxusa zérus.

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Feladat:



25A-1 Számítsuk ki a Φ_E fluxust a 25-23 ábrán illusztrált tölteseloszlás esetére, az a, b és c zárt felületekre.

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Töltéssrűség

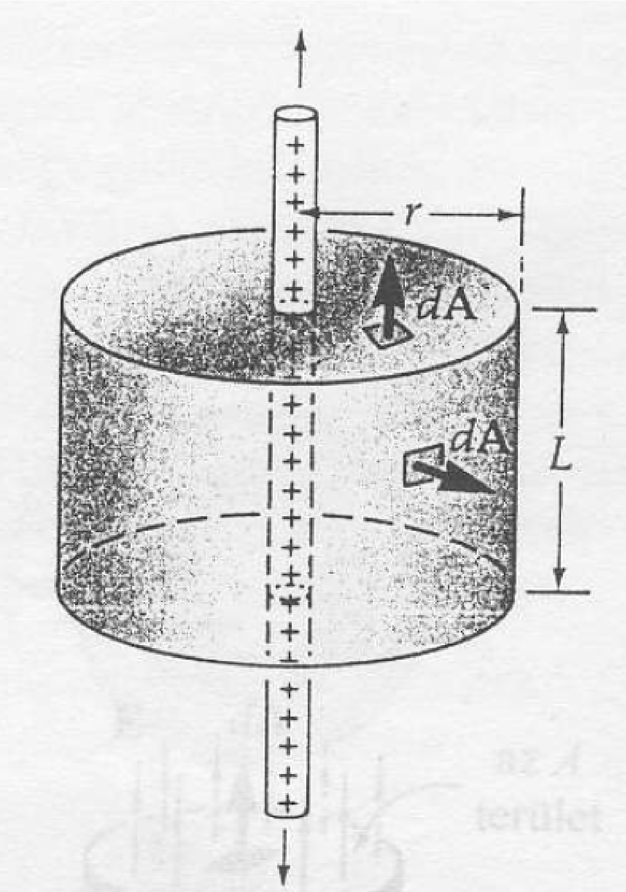
25-1 TÁBLÁZAT A töltéseloszlások jelölése

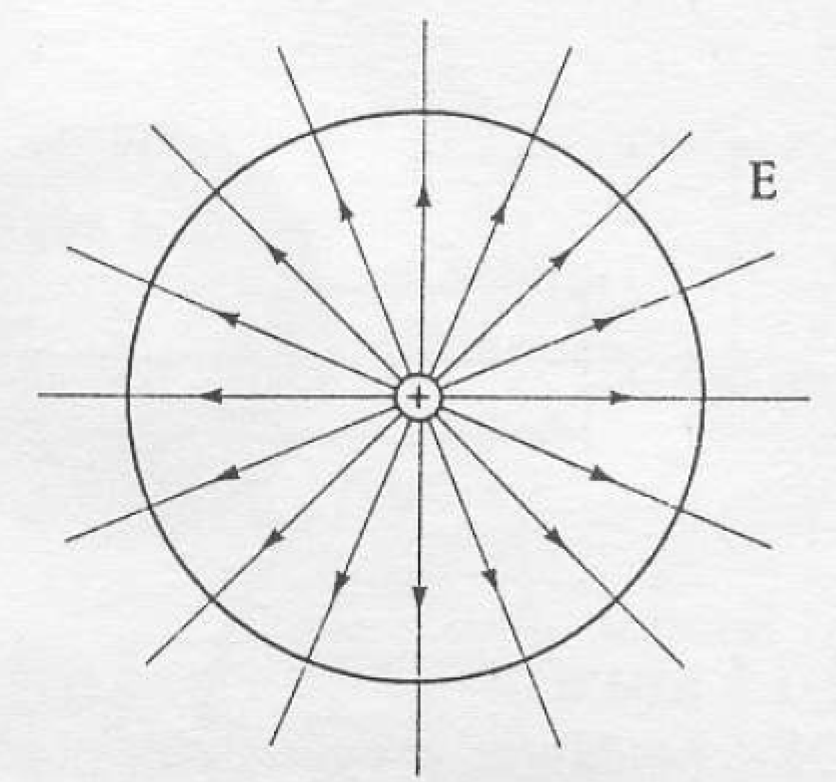
Eloszlás	Szimbólum	Egység	Elemi töltés	
Pontszerű töltés	q	C	q	
Vonalmenti	λ	C/m	$dq = \lambda dx$,	ahol dx egy elemi vonalszakasz
Felületmenti	σ	C/m^2	$dq = \sigma dA$,	ahol dA egy elemi felület*
Térfogati	ρ	C/m^3	$dq = \rho dV$,	ahol dV egy elemi térfogat*

* A felületet és a térfogatot úgy kell megválasztani, hogy bennük a töltés sűrűsége állandó legyen.

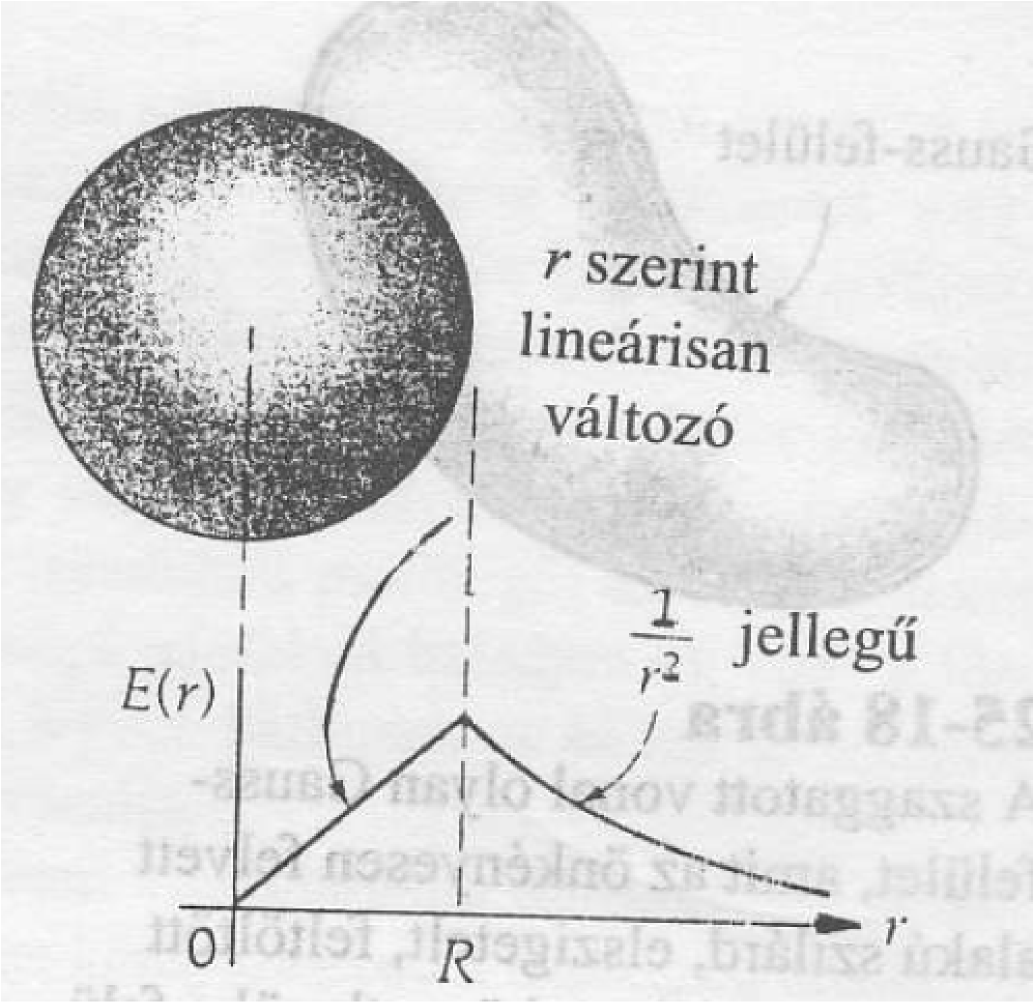
Töltéssrűség – végtelen töltött rúd elektromos tere

Pozitív töltések helyezkednek el egyenletesen egy végtelen hosszú egyenes mentén. A vonalmenti töltéssűrűség λ. Számítsuk ki az **E** térerősséget az egyenestől r távolságban.



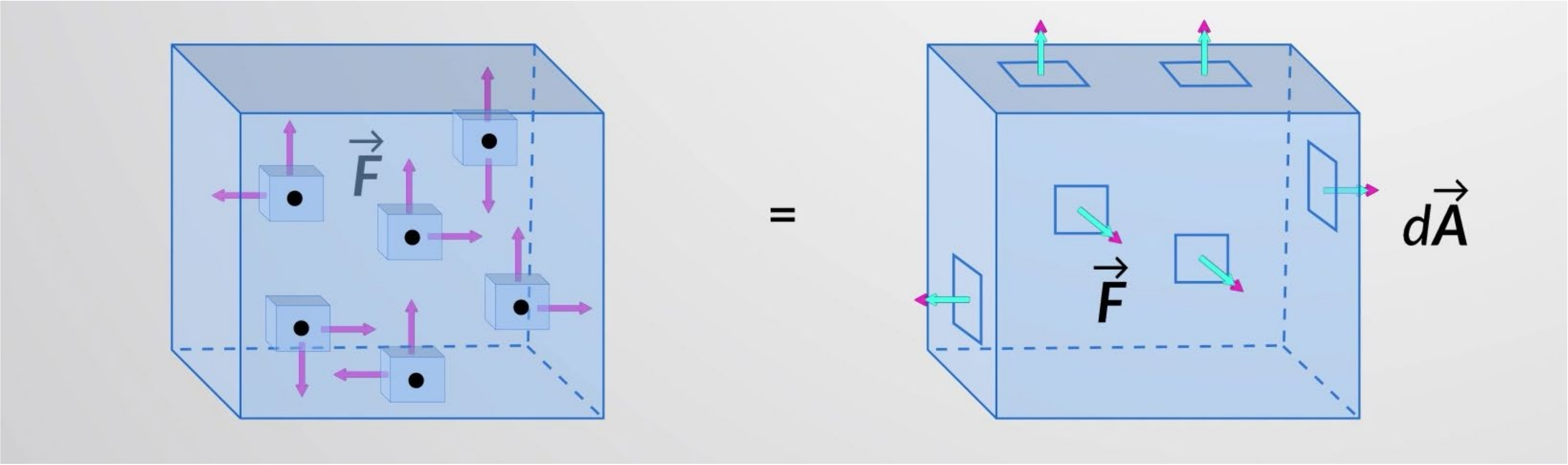


Elektromosan töltött gömb tere



Gauss–Osztrogradszkij-tétel
(Divergencia-tétel)

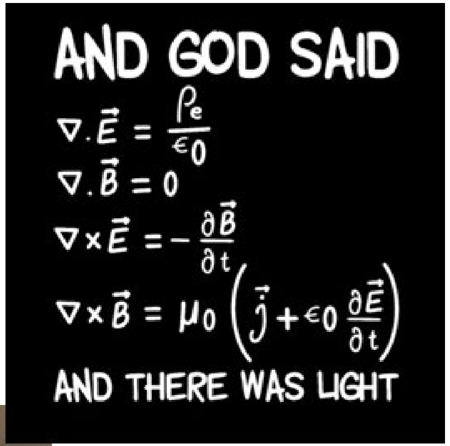
$$\oiint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{A} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV$$



Maxwell I.

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Tökéletesen vezető anyagokban!



Jelentés:

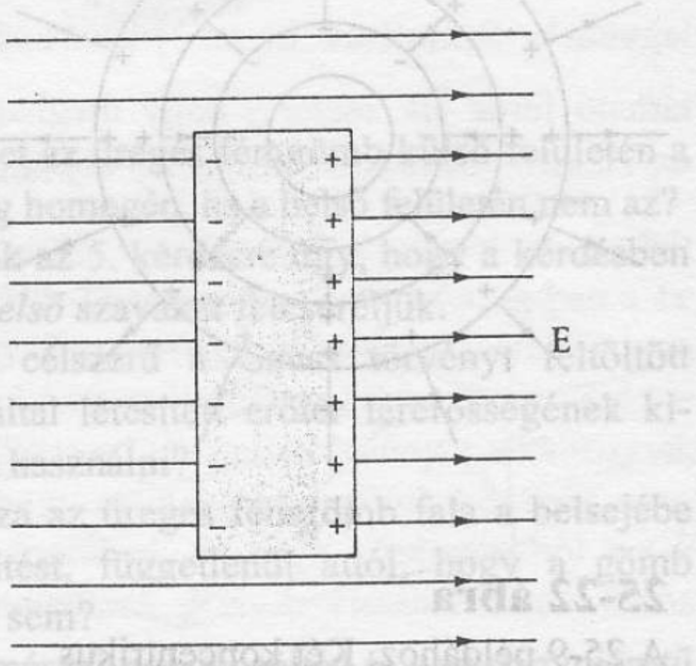
- Az elektromos tér forrása az elektromos töltés.
- Egy adott **r**(x,y,z) pontban az elektromos tér divergenciája arányos a pontban lévő töltéssűrűséggel.

Gauss törvény és az elektromos vezetők

Elektrosztatikus egyensúly:

Az elektromos erőtér a vezetőkben a töltéseket szabadon mozgatja.

Elektromos erőtérbe helyezett vezetőben lévő töltések nagyon gyorsan elrendeződnek a vezető felületén (egyensúlyi állapot), úgy hogy a vezető belsejében a külső térrel ellentétes tér jön. A két tér kioltja egymást, így a vezető belsejében az elektromos tér 0.



25-21 ábra

Egy külső elektromos erőtérbe helyezett töltetlen fémhasáb felületén töltések jelennek meg: a vezető belsejében, a megosztással keletkező felületi töltések által létrehozott belső erőtér kioltja az eredeti erőtér hatását, így a hasábon belül zérus nagyságú térerősség alakul ki.