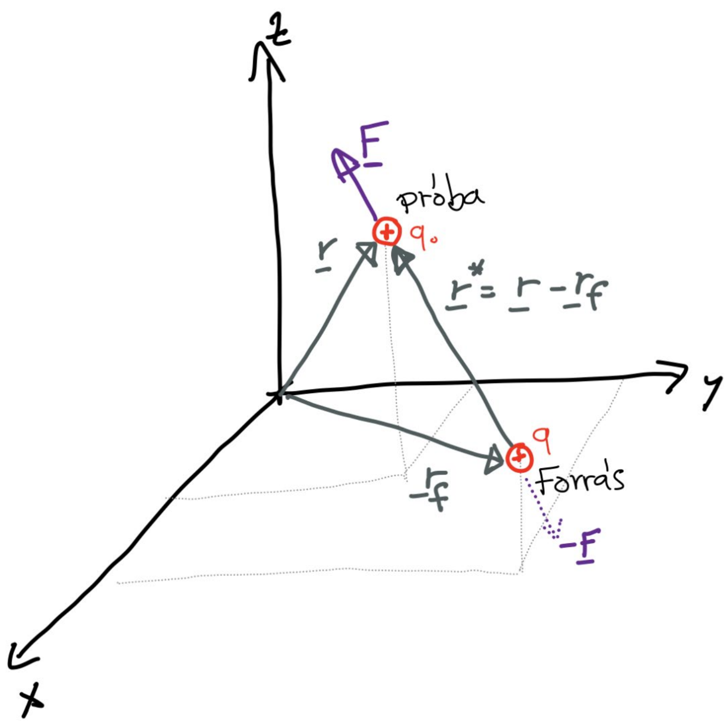
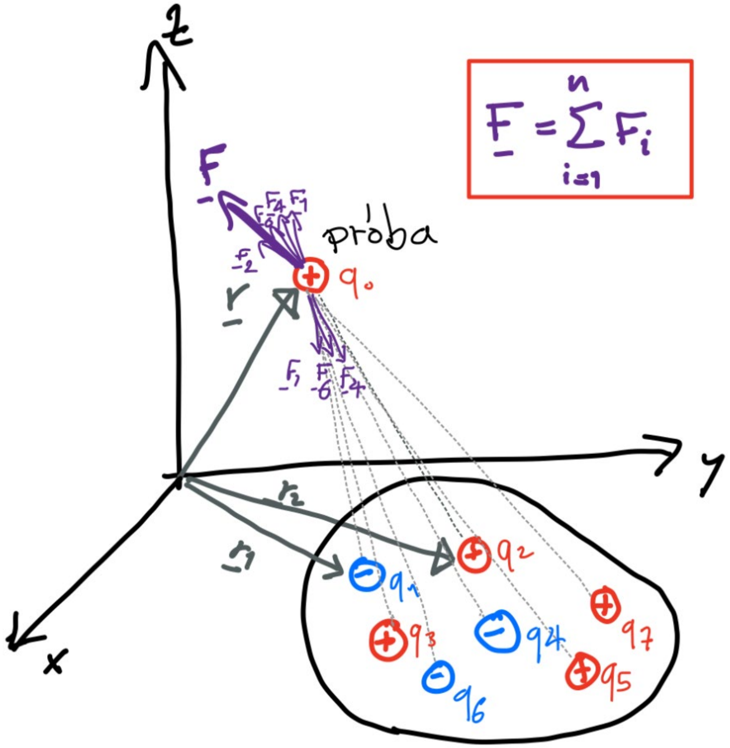
# Elektrosztatika 3

Elektromos potenciál, ekvipotenciális felületek, Poisson-egyenlet

# Ismétlés: Elektromos tér forrása



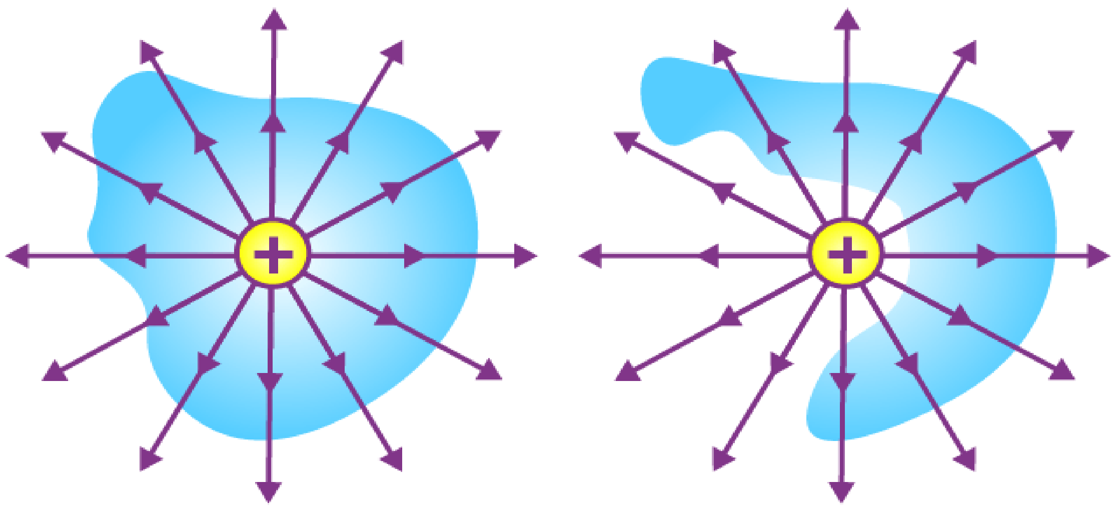




$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|^2}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_f|}$$

# Ismétlés: Elektromos fluxus – erővonal sűrűség

A fluxus = S felületen áthaladó erővonalak ”száma”:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$



**Gauss-törvény:**

Zárt felületen áthaladó erővonalak száma arányos a belül található töltéssel

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

# Ismétlés: Gauss–Osztrogradszkij-tétel
## (Divergencia-tétel)

(Tökéletesen vezető anyagokban)

$$\oiint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{A} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

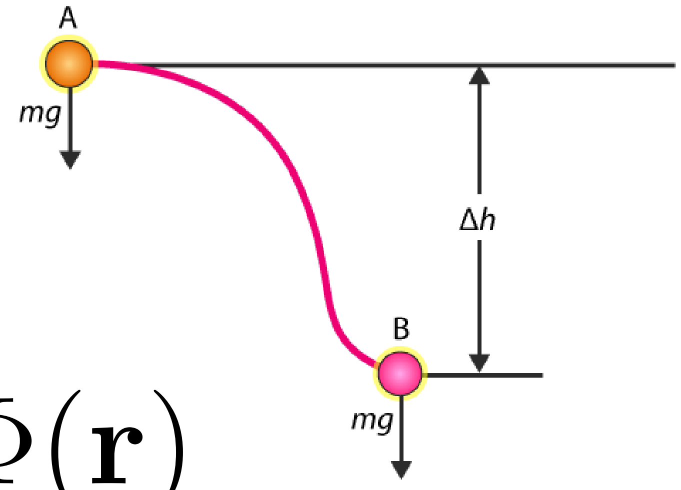
Az elektromos tér forrása az elektromos töltés. Egy adott **r**(x,y,z) pontban az elektromos tér divergenciája arányos a pontban lévő töltéssűrűséggel.

# Potenciál

Gravitációs erő: $\mathbf{F}_G \sim \dfrac{1}{r^2}$

→ Gravitációs erőtér: $\mathbf{g}(\mathbf{r})$

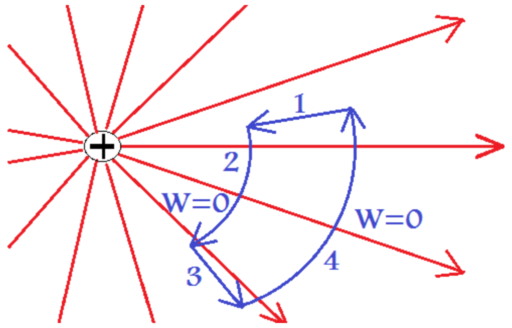
→ Gravitációs potenciál: $\Phi(\mathbf{r})$




Elektromos (Coulomb) erő: $\mathbf{F}_C \sim \dfrac{1}{r^2}$

→ Elektromos erőtér: $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

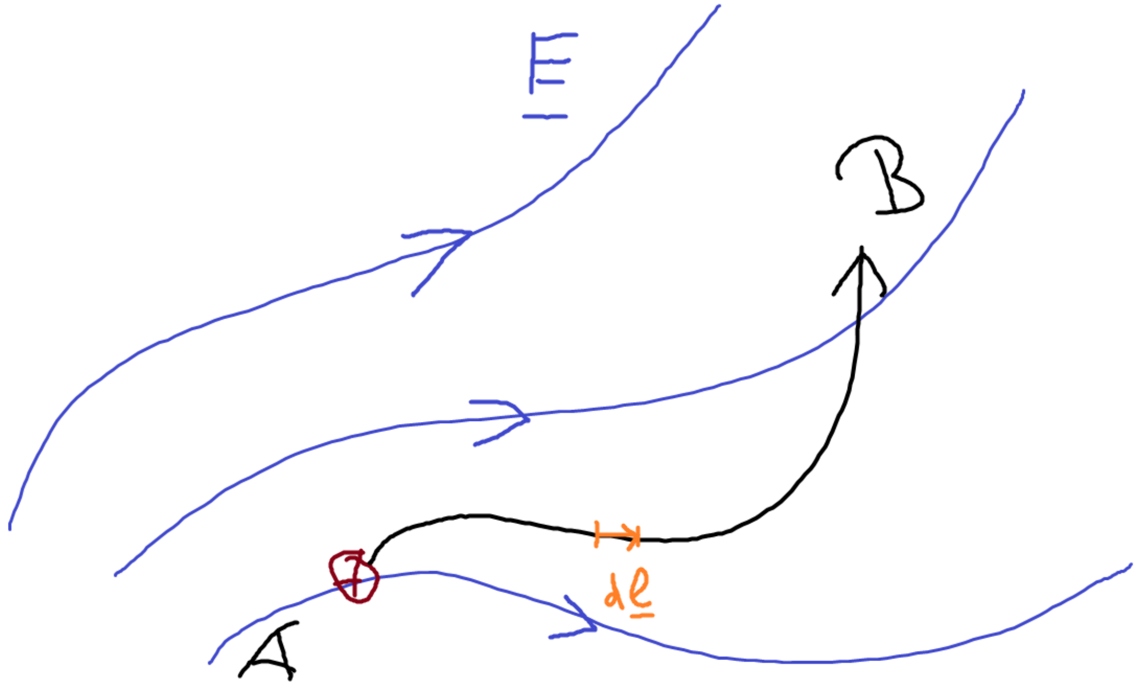
→ Elektromos potenciál: $V(\mathbf{r})$



# Elektromos potenciál / potenciál-különbség

$V$: elektromos potenciál, $U$: Elektromos potenciál-különbség (sokféle elfogadott jelölés)

Def.: Az elektromos erőtér ($\boldsymbol{E}$) által végzett munka a próbatöltés elmozdítása közben

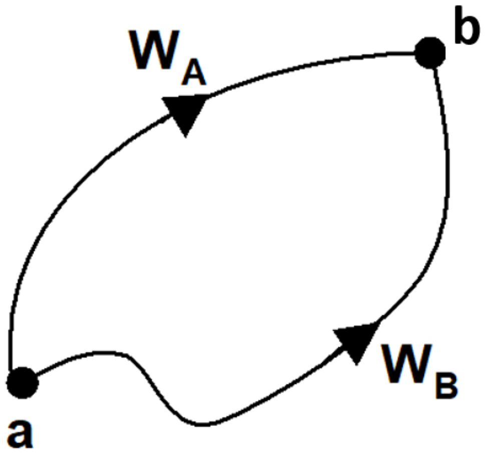



$$W_E = -\int_A^B \mathbf{F}_E \, d\mathbf{l} = -\int_A^B q_0 \, \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$$

$$U = \frac{W_E}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$$

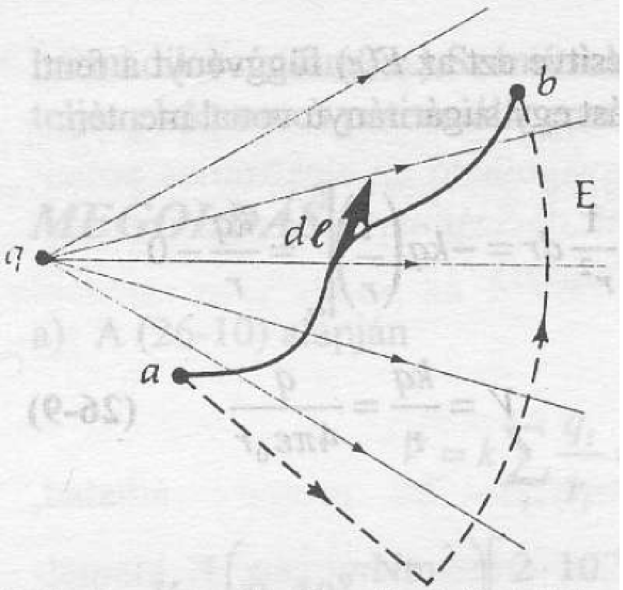
Mértékegység: $\left[\frac{J}{C}\right] = [V]$ (Volt)

# Konzervatív erőtér




$$W = \int\limits_{\substack{A \\ C_1}}^{B} \mathbf{F}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{\substack{A \\ C_2}}^{B} \mathbf{F}\, d\mathbf{l}$$

$$U = \int\limits_{\substack{A \\ C_1}}^{B} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{\substack{A \\ C_2}}^{B} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$$




Minthogy az **E** térerősségű erőtér konzervatív erőtér,

a $\Delta V = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\ell$ potenciálkülönbség azonos, akár a folytonos, akár a szaggatott vonal mentén végezzük el az integrálást.

A tér minden pontjához rendelhetünk potenciál értéket!

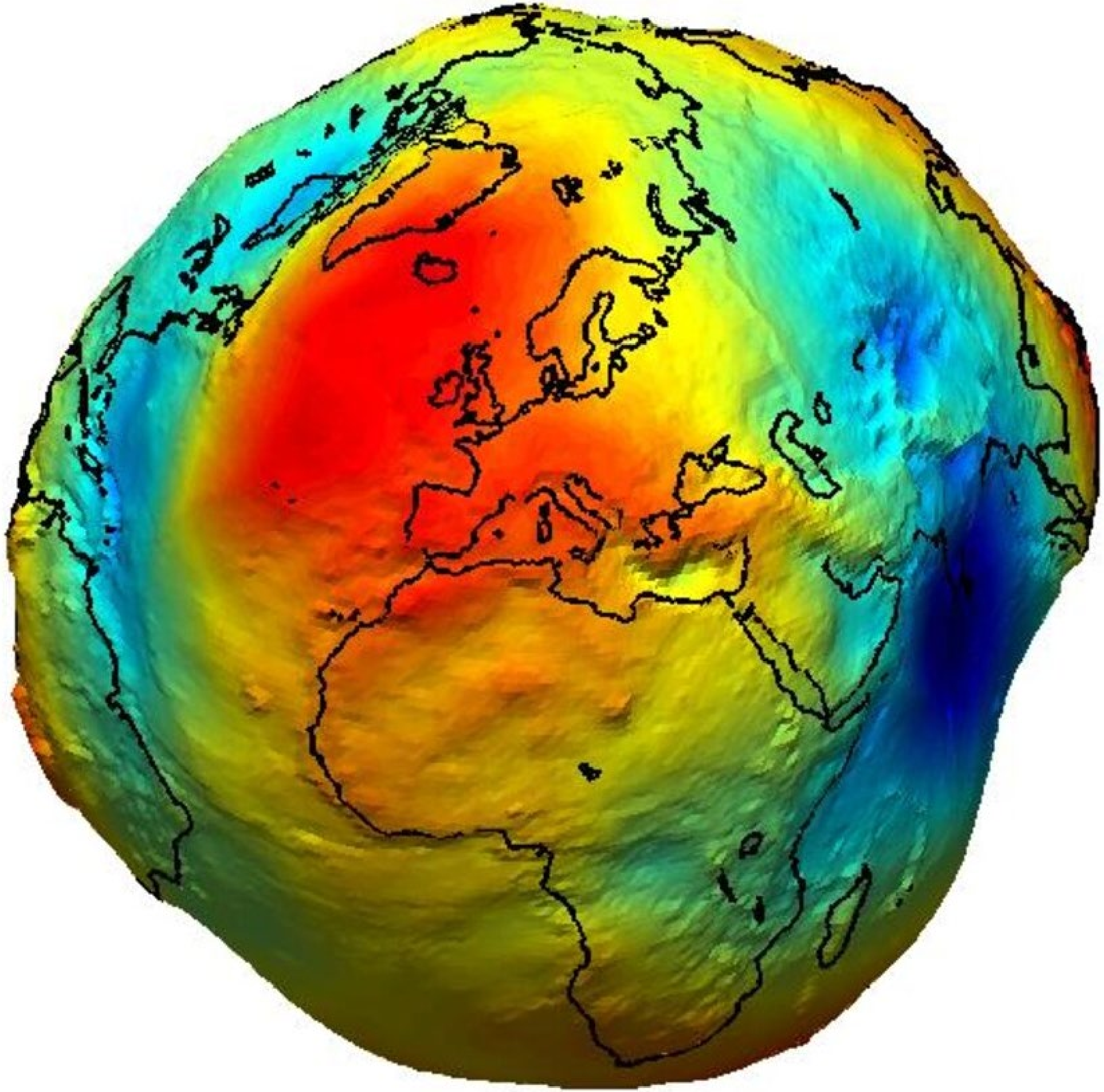
Elektromos potenciál *A* pontban: $V(A) = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$

# $V$ és $U$ kapcsolata

$$U = -\int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\left(\int_A^\infty \mathbf{E}\,d\mathbf{l} + \int_\infty^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l}\right) =$$

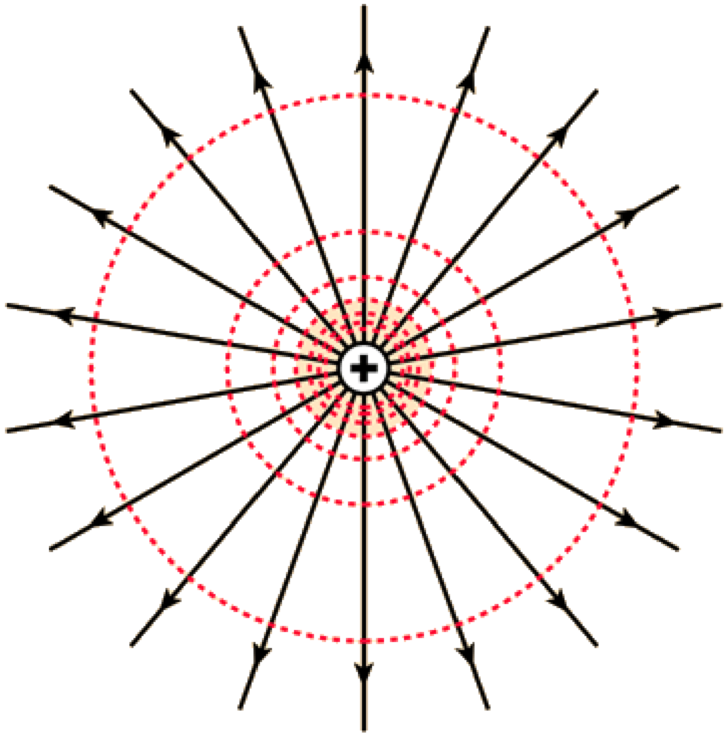
$$= -\left(-\int_\infty^A \mathbf{E}\,d\mathbf{l} + \int_\infty^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l}\right) = -\left(V(A) - V(B)\right) =$$

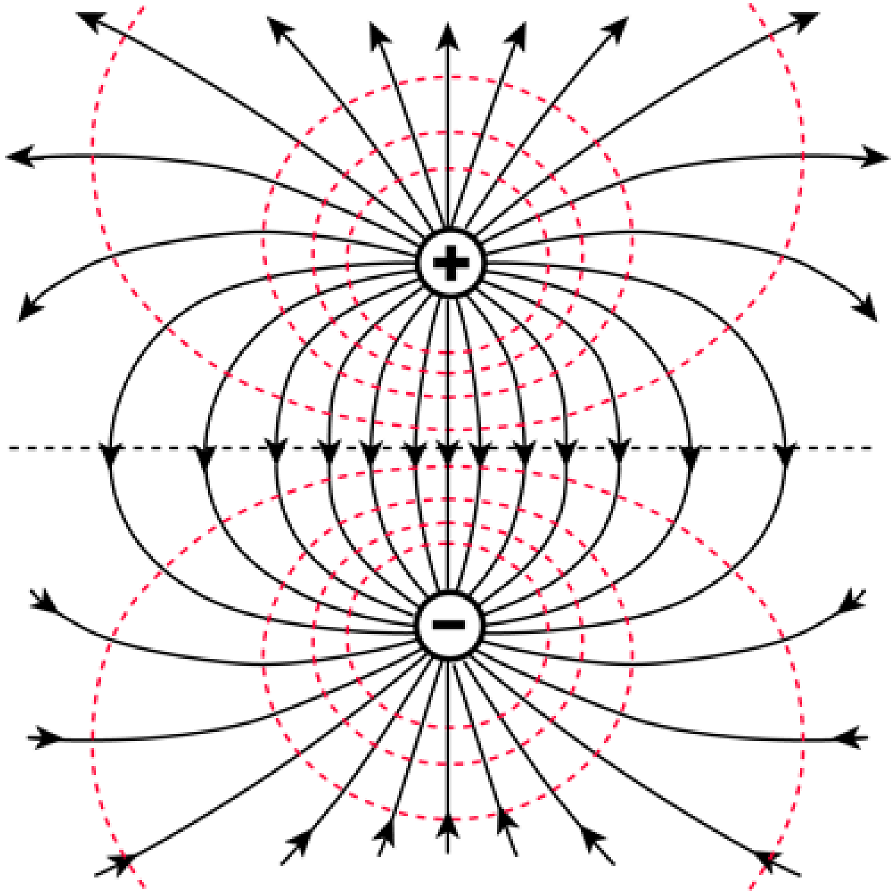
$$= V(B) - V(A)$$

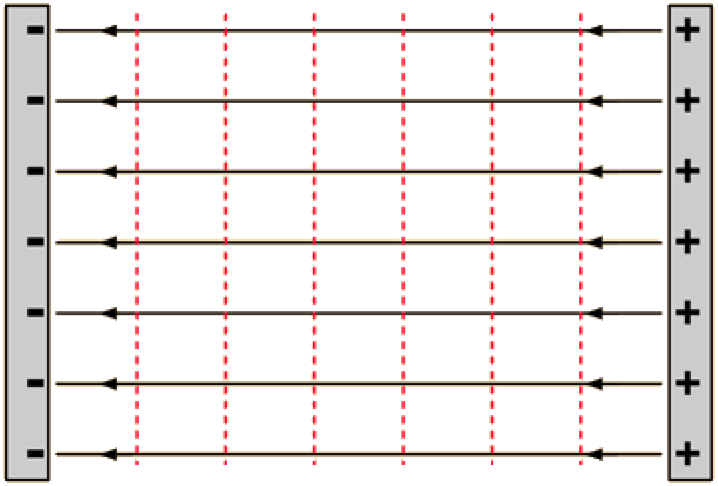


# Ekvipotenciális felületek

$$V = állandó$$



$$U = -\int_A^B \mathbf{E}\, d\mathbf{l} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla U$$

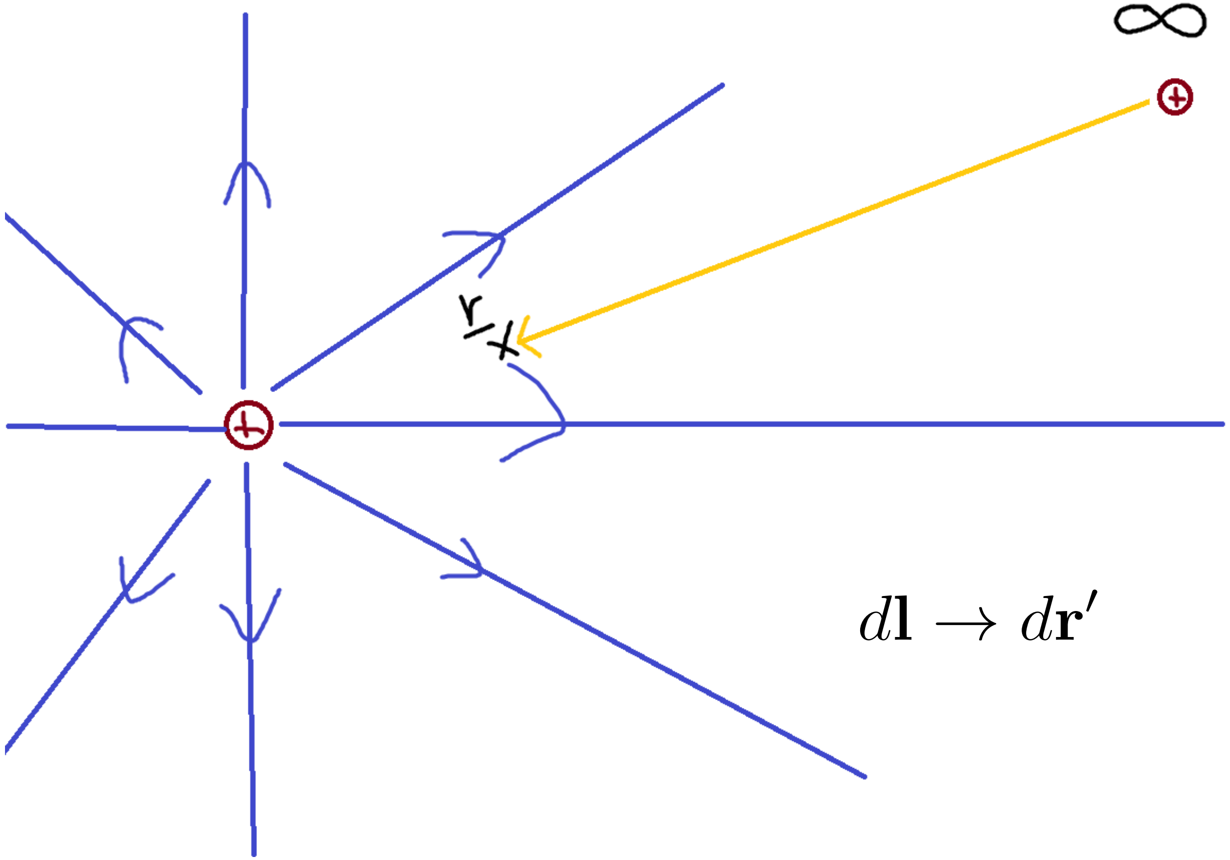
# Poisson-egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \mathbf{E} &= \nabla\left(-\nabla U\right) = -\nabla^2 U = -\Delta U \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Laplace-operátor f skalártérre:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

# Ponttöltés elektromos potenciálja




$$d\mathbf{l} \to d\mathbf{r}'$$

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\, d\mathbf{r}' = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'^2} \hat{\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2} \hat{\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2}\, dr' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r} - 0\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

Valós töltéseloszlás esetén: Az egyes ponttöltések elektromos potenciáljának szuperpozíciója